〔実際の記録〕

数学科の教師教育におけるケースメソッドの開発(1)

―数学観・教育観の再構成に向けて―

佐　藤　英　二

はじめに

本稿では，中等学校の数学科の教師教育においてケースメソッドを用いることの意義と課題を検討したい。最初に教師の能力に関するモデルを提示しながら，教師教育においてケースメソッドが必要となる背景を述べ（第1節），続いて，教師の持つべき能力のうち，数学教育に関する信念システムを再構成するためのケースと授業中における即興的な判断力を育成するためのケースを第2節と第3節で紹介しつつ，そのケースの意味を検討したい。なお紙数の関係から，今回は第2節までを扱い，第3節以後については次回に扱うこととしたい。また本稿の議論は，具体的なケースの意義に関する議論を除いて，数学科以外の教科にもほぼ同様に当てはまるものと思われる。

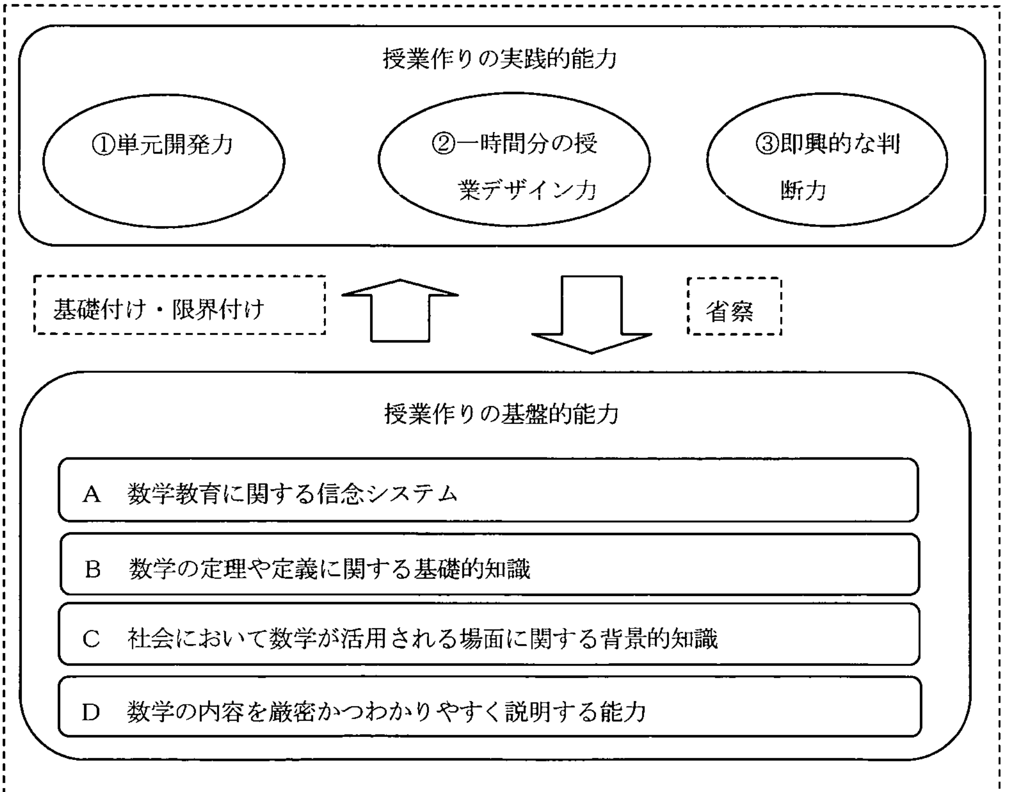
第1節　教師の能力モデルと教師教育におけるケースメソッドの意義

教師教育とその方法に関する理論は，何らかの意味で教師の有する能力に関するモデルを前提とせざるを得ない。そこで，ケースメソッドに関する議論に入る前に，教師の能力モデルを提示したい。なおここでの議論は，あくまで授業作りに関する教師教育の方法を議論するための仮説的なものである。

まず，数学教師に求められる能力を，授業作りに直接関わる実践的能力とその実践的能力を基礎付け同時に限界付ける基盤的能力とに分けて考えよう。一般に授業作りの過程は，事前に5時間～10時間などのひとまとまりの単元を開発する過程，その単元を構成する一時間ごとの授業のデザインを作る過程，および実際の授業において生徒の答えや状態に応じてデザインを即興的に組み替えていく過程の三層で構成される。したがって，授業作りの実践的能力も①単元開発の能力（以下単元開発力），②一時間分の授業をデザインする能力（以下一時間分の授

業デザイン力)，および③即興的な判断力の三層で捉えることができる[1]。また，授業作りの能力が実地の経験の蓄積とともに成長する反面，経験の積み重ねだけでは壁に当たる面を持っていることを考慮すれば，授業作りの能力として，実践的能力だけでなく，その実践的能力の成長を枠付ける基盤的能力を想定することができる[2]。そこには，A 数学観・授業観・教師観など数学教育に関する信念システム，B 数学の定理や定義に関する基礎的知識，C 社会において数学が活用される場面に関する背景的知識，D 数学の内容を厳密かつわかりやすく説明する能力が含まれる。以上の能力モデルをまとめたのが下の図である。

教師に求められるこれらの能力のうち，従来の養成教育で重視されてきたのは，B 数学的な知識の充実であろう。また B を充実させる過程で厳密な証明のトレーニングが行われることから，基盤的能力の D，すなわち数学的な内容に関するプレゼンテーションの能力も副次的に養成されてきたと言える。しかし，それ以外の能力，とりわけ，授業作りの実践的能力（①～③）については，教育実習を通して一部養成されながらも，おおかたは現職に就いた後各々の教師が経験を通して身に付けてきたのが実態であり，社会的な関連性を持つ教材の開発力を支える基盤的能力の C や，単なる経験の蓄積を超えた授業のパラダイム転換を可能とする数



授業作りに関する教師の能力モデル

学教育に関する信念システム（基盤的能力のA）の再構成については，大学教育の対象としての明確に位置を与えられてこなかった[3]。

もっとも授業作りの実践的能力（①②③）や数学的知識以外の基盤的能力（特にAとC）の育成が養成教育の主たる内容とされてこなかったことも，理由がないわけではない。授業が特定の学校・教室において，特定の家庭環境・生育歴を有する生徒によって結ばれている特定の生徒−教師関係ないし生徒−生徒関係の中で営まれる個別具体的ものである以上，授業作りの方法を抽象的一般的に論ずるのは十分でないからである。授業作りの方法の一般性普遍性を追求した場合，おうおうにして内容が空疎になってしまうことも指摘されている。一般性を追求した場合に内容が空疎化する点は，教育観などの信念システムの再構成の場合も同様である。数学教育に関する信念は，学生の個々の被教育体験と密接に結びついている。したがって，その体験に対する個々人の意識的な再認識と再検討がなされない限り，教育観をそれ自体取り出して真なる命題として学生に伝えることは，学生の信念の再構成へと結びつかない。授業作りの実践的能力にしても数学教育に関する信念システムにしても，各々の教材や学生の状況に規定されているがゆえに，普遍的な真理の伝授を役割としてきた古典的な大学教育の役割像に適合しなかったと言えよう。

しかし，普遍的な知識の追究とそれの伝承という大学教育の古典的な役割像に関しては，それが前提としていた専門職像とともに，近年問い直しが迫られている。普遍的な専門的知識を有しそれを個々の状況に適用する古典的な専門職像に代わる，多様で多元的な文脈の意味を解読しつつ，自らの信念システムを再構成しながら，問題を解決していく反省的実践家としての専門職像の提起である（D. ショーン）。一般的で普遍的な知識の習得が必ずしも豊かな実践を保障しないという教師の仕事の固有性に照らして，反省的実践家としての教師のあり方が追究されているのである。

それでは，多分に偶発的な事件の連鎖として経験されがちな現職生活を経る他に，教師が反省的実践家として成長するための，多少とも系統的な道はないのだろうか。ここにおいて，教師が遭遇する課題を具体的なケースとして取り上げ，そのケースで掲げられる問題の意味を追究するケースメソッドの必要が生ずる。

教師教育におけるケースメソッドに関しては，生徒指導の方法に関して一部開発されているが，各々の教科に即したケースの開発はいまだなされていない。学校現場で開発された教材を紹介する様式での教師教育は，授業作りの実践的能力の①単元開発力を育成するためのケースメソッドの先駆的事例といえる。これに関しては，事例の紹介にとどまり，これまで開発されてきた単元の持つ教育学的意味，あるいは単独の数学の問題を単元の形に組み替えていく際に教師の中で働く知恵などの解明については途上というべきかもしれないが，教師教育におけるケースメソッドが最初に適用された例と見ることができる。

そこで以下では，ケースメソッドの開発が十分になされてきたとは言えないＡ数学教育に関する信念システムの再構成と③即興的な判断力の育成に関して，開発したケースを紹介しつつ，そのケースの意義を検討したい。

第２節　数学教育に関する信念システムを再構成するためのケース

(1)　大学において初等中等学校の数学を学び直す必要性

ケースの紹介に入る前に，数学教育に関する信念システムを再構成する意義を確認しておきたい。

学生は，初等中等学校における数学の学習を通して，数学的な知識や技能だけでなく，数学や数学教育に関するさまざまな信念を有した状態で大学に入学する。その信念は，数学とは何であり（数学観），数学はどのように教えられるべきか（数学教育観）といった数学教師にとって重要な信念を含んでいる。しかし，彼らの数学観や数学教育観は，彼らが12年間にわたって受けてきた授業や自分の学習経験を通して，暗黙のうちに形成されたものであり，自覚的な反省や吟味を経て鍛え抜かれたものではない。結果として，学生は，数学を個々の真理の集積と捉え，公式を記憶しているかどうかを重視する伝統的な数学観ないし数学教育観にとらわれたままである。学生は，一般に，問題の決まりきった解法には習熟しているのに対し，基本的な定理の証明を自分なりに作り出した経験は乏しい。数学の学習は，あくまで個別の問題の解法の理解と習熟にとどまり，問題の相互関係を考察し，中等教育の数学の構造的な把握に至ることはまれである。そのため，中等学校の数学は，分離したいくつかの問題とそれに対応した解法のペアとして捉えられることになる。

数学を互いに関連性を持たない真理の集積として捉える数学観やそこから導かれる数学教育観に関しては，従来から批判がなされてきた[4]。初等中等学校の数学（以下，学校数学と呼ぶ）の内容に関しては，教職に就いた後，必然的に学び直すことに迫られるため，大学卒業後にも理解が深まる可能性がある。しかし，数学観や数学教育観は，大学において自覚的に捉え直す機会が与えられなければ，変革の可能性は乏しい。したがって，数学科の教師教育では，単に，初等中等学校の数学よりも高等な知識を授けて，それを学校数学の知識体系の上に積み重ねるだけではなく，数学や数学教育に関する素朴な信念を捉え直すことにも力を向けなければならない[5]。

さらに，学校数学に慣れ親しんだ学生の文化の持つ意味を一層重視するならば，学生が経験した学校数学を主題的に取り上げることによって，学校数学の改革を探るアプローチが浮び上がってくる。学生がこれまでに学んできた学校数学を主題的に取り上げなければ，学校数学の個々の内容に関して学生が抱いている伝統的な信念やミス・コンセプションを考察することは

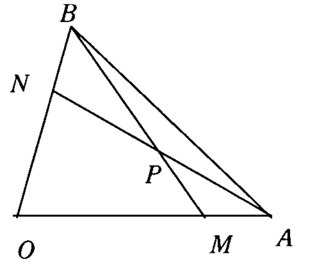
難しいからである。この点について，T. コーニーは，「数学と数学教育に関する学生の信念システムに分け入るための最良の方法は，学校数学の検討を行うことだ」[6]と述べている。

また，理科教育における仮説実験授業のような斬新な教育方法を教師教育の授業で扱うことは，学生の学問観や教育観を揺さぶる上で大変有効であると思われる。しかし，大学で紹介される教育方法があまりに自らが受けた授業の様式と異なっている場合，学生は，教職に就くと同時に，大学で学んだ教育方法を捨て去って伝統的な教育方法に戻る可能性が高い。したがって，教師教育においては，学生にとってなじみがない教育方法を紹介するとともに，学生が親しんできた古典的なスタイルの授業の内部にどのような改革の可能性があるのかという点も追究する必要があるのである[7]。

(2) ケース

そこで，今回は，学生が十分に親しんでいると思われる以下の問題を取り上げた。

$OM:MA=3:1$，$ON:NB=2:1$のとき
$AP:PN$はいくつか。
解き方をできるだけたくさん考えること。



この問題は，高校の教科書に掲載されているポピュラーな問題であるだけでなく，解決する上で多様なアプローチが可能である点でも，教師教育の適切な教材と言える。アプローチとしては，おおよそ次の7種類がある。

①ベクトルの一次独立を利用する方法。

②平行線を引いて，線分の比をある一直線上における線分の比に置き換えていく方法。

③メネラウスの定理を利用する方法。

④三角形の面積比を利用する方法[8]。

⑤チェバの定理を利用する方法。

⑥点O，A，Bを座標で表現し，直線ANと直線BMの交点としてPの座標を求める方法。ただし，これには次の二つの方法があり得る。

a)　Oを原点，Aをx軸上，Bを第1象限に置く方法

b)　Oを原点，Aをx軸上，Bをy軸上に置く方法

⑦実験から結果を帰納する方法。これにも二つの方法がある。

a)　多様なΔOABを書き，作図と測定により$AP:PN$を推測する方法

b)　天秤を利用する物理的な方法（後述）

(3)　ケースの実践例とこのケースの意義

履修者20名のクラスにおいて，この問題を次回までの宿題として提示したところ，全員が少なくとも一通りの方法で解くことができた（最高で4通り，1人平均2通り）。⑥と⑦bの方法で解いた学生はいなかった。アプローチ別の学生数は右の通りである。

1)　多様なアプローチの確認

最初に，学生のレポートを参照しつつ，個々のアプローチを具体的に確認していった。学生は自分が想定していなかったアプローチが多数存在することに驚いた様子であった。学生の中には，問題が解けるかどうかのみを重視する者も少なくない。そこで，ここでは，この見慣れた問題においても多様なアプローチが可能であり，教師として教壇に立った場合には，生徒の多様な発想に対応する必要があると述べ，教材研究の必要性を指摘した。

解　法	人数
①ベクトルの利用	14人
②平行線の利用	3人
③メネラウスの定理	14人
④面積の利用	2人
⑤チェバの定理	3人
⑥座標の利用 a, b	0人
⑦a 作図	3人
⑦b 物理的な方法	0人

2)　具体的事例の一般化によるメネラウスの定理の導出

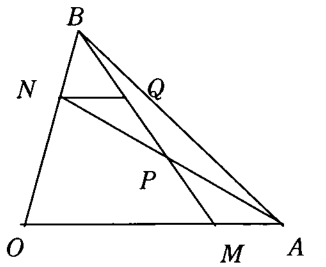
続いて，学生が提示した上の①～⑤と⑦aが相互にどのような関連性を持っているのかという考察に移った。最初に，線分の比を利用した方法②とメネラウスの定理を利用する方法③がどのような関係にあるかを問うた。学生の中には，双方のアプローチを示した学生もいたが，この二つのアプローチの関係を理解している学生はいなかった。

そこで，線分の比を利用する②のアプローチを板書し，それと対照させる形で，$OM:MA=3:1$の3をm，$ON:NB=2:1$の2をnと置き換えた一般的な事例について，②の解法を書き直していくように求めた。たとえば以下の通りである。

〈線分の比を利用する②の方法〉

Nを通り，OAと平行な直線が，BMと交わる点をQとする。このとき，NQとOAは平行だから，$\Delta BNQ \backsim \Delta BOM$。

よって$\dfrac{NO}{OM}=\dfrac{BN}{BO}=\dfrac{1}{3}$であり，$NQ=\dfrac{1}{3}OM$。



次に，NQ と AM は平行だから，$\Delta PAM \backsim \Delta PQN$。

よって，$\dfrac{PA}{PN}=\dfrac{AM}{QN}=\dfrac{AM}{\frac{1}{3}OM}=\dfrac{3AM}{OM}$。

今，$OM:MA=3:1$ だから，$3AM=OM$。よって，$AP:PN=1:1$。

〈上の解答で $OM:MA=3:1$ の 3 を m，$ON:NB=2:1$ の 2 を n と置き換えたもの〉

N を通り，OA と平行な直線が，BM と交わる点を Q とする。このとき，NQ と OA は平行だから，$\Delta BNQ \backsim \Delta BOM$。

よって，$\dfrac{NO}{OM}=\dfrac{BN}{BO}=\dfrac{1}{n+1}$ であり，$NO=\dfrac{1}{n+1}OM$。

次に，NQ と AM は平行だから，$\Delta PAM \backsim \Delta PQN$。

よって，$\dfrac{PA}{PN}=\dfrac{AM}{QN}=\dfrac{AM}{\frac{1}{n+1}OM}=\dfrac{(n+1)AM}{OM}$。

今，$OM:MA=m:1$ だから，$mAM=OM$。よって，$\dfrac{PA}{PN}=\dfrac{n+1}{m}$

ここで，$m=\dfrac{OM}{AM}$，$n=\dfrac{ON}{BN}$ を用いて，m と n を消去すると，

$\dfrac{MA}{OM}\cdot\dfrac{PN}{AP}\cdot\dfrac{BO}{NB}=1$（メネラウスの定理）が得られる。

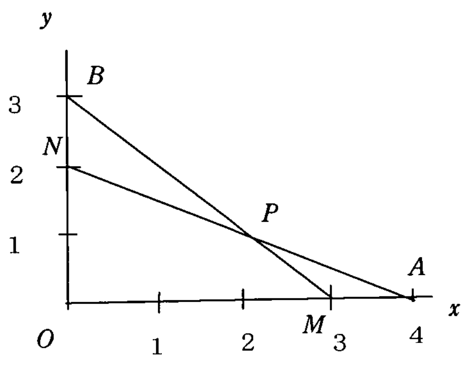
学生は，おそらく一種の呪文として記憶していたメネラウスの定理が，具体的な事例の考察を一般化することによって得られることに気づき，非常に驚いた。今回取り上げた事例は，数学的活動における一般化と特殊化の意義を取り上げる上でも有効である。さらに，三角形の面積を利用した方法④を敷衍することにより，チェバの定理（⑤）が得られることを指摘した（注 8 を参照。なお④からメネラウスの定理も得られる）。

3) 座標を用いる方法の真偽

今回，座標を利用した学生がいなかったため，座標を利用したアプローチ⑥については，教師の側が導入し，学生に解かせることとした。まず，点 B を第一象限に置いた⑥ a について，直線の式や交点の導出，および交点の座標から $AP:PN$ を求める手続きを示し，この方法で解が得られるという見通しを確認した。これについては，式がかなり煩雑になるため実際

に解く必要はないように思われる。

続いて，「ある生徒が次の方法で解いた場合，あなたはどういったコメントをしますか」という問いを出した上で，点 B を y 軸上に置いた⑥ b の方法を紹介した。なおグラフは，次の図のように $\angle BOA$ が 90° と等しく見えるように板書した。



O, A, B を $(0,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(0,\ 3)$ と置くと，M，N は $(3,\ 0)$，$(0,\ 2)$ となる。

ここから直線 AN は $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$，直線 BM は $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=$ となる。

今，点 P はこの二直線の交点だから，その座標は，直線 AN の式と直線 BM の式で構成された連立方程式を解いて，$(2,\ 1)$ となる。

ここから点 A と点 P の x 座標の差＝点 P と点 N の x 座標の差。

よって，AP : PN＝ 1 ： 1 。

このとき，学生の間でこのアプローチの真偽をめぐって，議論が起こった。圧倒的に多かったのは，このアプローチは一般性がないため，適切ではないとする側であった[9]。彼らが示した論拠は，今回の問題において，$\angle BOA=90^\circ$ であるとは限らないというもの，および，$OA : OB = 4 : 3$ であるとは限らないというものであった。これに対し，このアプローチの個々の手続き（直線の表現，交点を求める手続き，座標の値から AP : PN を求める手続き）において，$\angle \mathrm{BOA}=90^\circ$ という条件を使っていないとする反論が出たが，反論をした学生も自信はなさそうであった。

そこで，教師の側が介入し，ベクトルを用いたアプローチ①とこのアプローチとの関係を理解しているかと問いつつ，両者の関係を述べていった。実際には，$OA=4\vec{a}$，$OB=3\vec{b}$，$OP=x\vec{a}+y\vec{b}$ と置き，点 P が直線 AN 上にあるという条件，直線 BM 上にあるという条件から，x，y の関係式を求めると，$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ と $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$ が得られる。つまり，ベクトルを用いた方法①と OA，OB を座標軸にとって座標を用いる方法との違いは見かけの違いに過ぎない。この

ことに気づき，学生は非常に驚いた。

4) 物理的世界と数学的世界の関連づけ

最後に，中等学校で学ぶ数学が物理学の内容と関連していることを確認するため，三頂点に質点が置かれた三角形の重心を道具によって求めた。

まずバルサの棒を接着剤でつないで三角形 OAB を作り，点 O，A，B に，重量比 1 : 3 : 2 のおもりをつり下げた。そして，点 B と線分 OA 上の一点 K を結ぶようにバルサの棒を通し，全体が水平を保つように K の位置を定めた。O と A に取り付けたおもりの重量比から，K は M に一致する（てこの原理)。次に，点 A と線分 OB 上の一点 L を結ぶようにバルサの棒をもう一本通し，全体が水平になるように，L の位置を定めた。O と B に取り付けたおもりの重量比から，L は N と一致する。三角形 OAB に挿入した二本の棒は，AM と BN を示している。そして，その両者の交点が求める点 P である。点 P に紐を結んで，三角形 ABC をつるすと，全体が水平を保つことになる。この状態で，三角形 OAB の下に，点 P を通り直線 OB に平行な直線の棒を置いた場合，三角形はどちらに傾くかと問うた。学生は，容易にどちらにも傾かないことに気づいた。そして，実際にそのことを実験で確認した後，この事実から $AP : PN$ の値がわかることを確認した。

数学を現実の物理的世界から切り離された形式的な規約として捉えている学生にとって，線分の比という抽象的な値が，物のつりあいという身近な現象と関連しているという事実は，まったくの驚きであった。

注

1「単元開発」と同義の概念として「教材開発」があるが，ここでは「単元開発」を用いている。教材が教えるための物である「教具」と混同されることがあること，および単元が学習者において経験される意味のまとまりという，授業作りにおいて有意義な意味を持っていることによる。

2 授業作りの実践的能力が経験の蓄積に伴って一定程度成長する一方で，ある基盤的能力によって基礎付け限界づけられているとするここでの理解は，科学の展開過程を通常科学と異常科学の交代として捉えるT. クーンのパラダイム論とパラレルである。

3 より厳密に言えば，数学教育に関する信念システムは何らかの数学的経験とともに暗黙のうちに学ばれるものであるから，B 数学的な知識の充実に力点を置いてきた旧来の教師教育は，他の知識や経験よりも数学的な知識を重視すべきであるとする価値意識を暗黙のうちに教えていたと言えよう。

4 大学での数学の学習が中等教育での教育方法やカリキュラムに関する意識の変革に結びつかないという問題は，F. クラインによって，すでに100年以上前に指摘されていた。クラインが試みたのは，学校数学の考察を積極的に大学教育の場に取り入れ，学校数学の内容を高等数学という「高い立場」から俯瞰し，再構成する方法であった。クラインにおける学校数学と大学での数学の関係は，単に前者を変革する方針が後者から演繹されるという一方向的なものではなかったが，あくまで，学校数学の内容を高等数学の見地から俯瞰するものであった点は確認しておいて良い。クラインの思想については，拙稿「中学教育における『学校数学』の形成と普及」（『日本教育史研究』第18号，1999年）を参照。

5 数学に関する教科専門の科目（代数学，幾何学，解析学等）の教育も，その教育が，学生の有する数学観や数学教育観を再構成する上でどのような寄与をなしうるかという視点から再吟味することが必要であろう。

6 Cooney, T. J. (2001). "Considering the paradoxes, perils, and purposes of conceptualizing teacher development", In F. Lin and T. J. Cooney (ed.), *Making sense of mathematics teacher education*, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 26.

7 Cooney が指摘する通り，大学での教師教育は，現実の教室に適応できる教師の養成という保守的な機能と，教育を改革できる教師の養成という進歩的な機能という緊張関係にある二重の機能を背負っている（ibid. p. 9)。

8 三角形の面積比を利用した方法としては，次のものがある。ΔPAB を S と置くと，$OM:MA=3:1$ より $\Delta OPB=3S$，$ON:NB=2:1$ より $\Delta OPA=2S$。ここで $\Delta OPB=3S$ と $ON:NB=2:1$ から，$\Delta OPN=2S$。よって，$AP:PN=\Delta OPA:\Delta OPN=1:1$。ここで OP と AB の交点を K とし，$OM:MA$，$AK:KB$，$BN:NO$ を ΔPOA，ΔPAB，ΔPBO の比で表して，OM などを消去するとチェバの定理が得られる。

9 工学部の学生に比べ，理学部の学生の場合，一般性に乏しいという理由から，このアプローチを拒絶する者が多く，またその姿勢も堅かった。このことは，学部による数学文化の違いを示すものとして興味深い。